Το Πυθαγόρειο θεώρημα: μία διάσημη μαθηματική σχέση στον εργαστηριακό πάγκο της Φυσικής

Παναγιώτης Μουρούζης

Το Πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο συνήθως περιγράφεται φορμαλιστικά από μία σχέση της μορφής $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, είναι πιθανότατα η μαθηματική σχέση που έρχεται στο μυαλό των περισσότερων ανθρώπων όταν ανακαλούν το μάθημα των μαθηματικών από τα μαθητικά τους χρόνια. Μια σχέση που μόνο η περίφημη σχέση του Einstein E=m·c2 μπορεί να τη συναγωνιστεί όσον αφορά την αναγνωρισιμότητά της από το ευρύ κοινό.

Όλοι μας σχετίζουμε την πρώτη σχέση με τα μαθηματικά και τη δεύτερη με τη Φυσική. Και αυτό γιατί μπορούμε να αποδείξουμε την πρώτη σχέση με τη χρήση των αξιωμάτων της Ευκλείδειας γεωμετρίας, άρα με τα μαθηματικά, ενώ η δεύτερη αποδεικνύεται στο πλαίσιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, δηλαδή κάνοντας Φυσική (Rindler, 2001).

Μήπως όμως τα πράγματα δεν είναι έτσι; Μήπως το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι ένας φυσικός νόμος που μπορεί να "ανακαλυφθεί" είτε θεωρητικά από πρώτες αρχές της Φυσικής είτε ακόμη και πειραματικά στο εργαστήριο Φυσικής; Μήπως τελικά και η ίδια η σχέση E=m·c2 κρύβει μέσα της μία μορφή του νόμου αυτού;

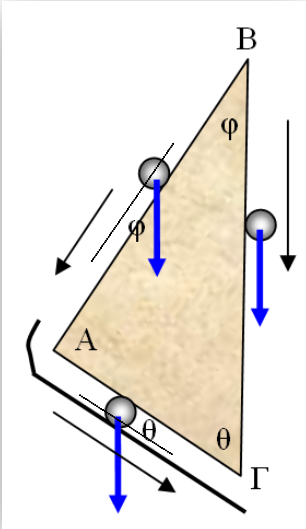
Το Πυθαγόρειο θεώρημα υπό το φως των αρχών της Φυσικής

Είναι γνωστό ότι υπάρχουν περισσότερες από 300 καταγεγραμμένες μαθηματικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος[1]. Η προσφυγή στο εργαστήριο Φυσικής μπορεί να προσθέσει κι άλλες στο μακρύ αυτό κατάλογο. Θα παρουσιάσουμε δύο τέτοιες αποδείξεις βασιζόμενοι ως επί το πλείστον σε γνωστές αρχές και νόμους της Φυσικής.

1η απόδειξη: κίνηση στο συντηρητικό βαρυτικό πεδίο

Το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό. Με άλλα λόγια το έργο του βάρους κατά τη μετακίνηση ενός αντικειμένου από ένα σημείο Β ενός βαρυτικού πεδίου σε ένα άλλο σημείο Γ (Σχήμα 1), είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθείται: εξαρτάται μόνο από τη θέση των δύο σημείων. Άρα στο

Σχήμα 1, στο οποίο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90°$, το έργο του βάρους της σφαίρας θα είναι το ίδιο είτε αν ακολουθηθεί η κατακόρυφη διαδρομή ΒΓ είτε αν ακολουθηθεί η διαδρομή ΒΑΓ.



Σχήμα 1. Μία σφαίρα μετακινείται από το σημείο Β στο σημείο Γ υπό την επίδραση του βάρους της (αναπαριστάται με το μπλε διάνυσμα), ακολουθώντας δύο δυνατές διαδρομές. Κάτω από την πλευρά ΑΓ η σφαίρα κινείται μέσα σε κατάλληλα διαμορφωμένο λούκι.

Από την ισότητα των δύο έργων, και το γεγονός ότι το βάρος σχηματίζει γωνία φ με την κατεύθυνση της κίνησης στη διαδρομή ΒΑ και γωνία θ στη διαδρομή ΑΓ, προκύπτει:

$$W_{AB} = W_{BA\Gamma} \Rightarrow$$

$$Mg(B\Gamma) = Mg(BA)\sigma\upsilon\nu\varphi + Mg(A\Gamma)\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$(B\Gamma) = (AB)\frac{(AB)}{(B\Gamma)} + (A\Gamma)\frac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)} \Rightarrow$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Η τελευταία σχέση είναι φυσικά το Πυθαγόρειο θεώρημα!

2η απόδειξη: το εργαλείο "διαστατική ανάλυση"

Μία σχέση μεταξύ φυσικών μεγεθών διαφέρει από μία μαθηματική σχέση στο ότι η πρώτη είναι αναγκαίο να είναι σωστή και διαστατικά. Πρέπει δηλαδή να προστίθενται μεταξύ τους μεγέθη που έχουν τις ίδιες πάντα μονάδες και οι μονάδες του πρώτου μέλους να είναι ίδιες με τις μονάδες του δεύτερου μέλους της σχέσης. Από την άλλη, μία μαθηματική σχέση αναφέρεται πιο αφηρημένα σε αριθμούς οπότε δεν είναι απαραίτητη η διαστατική επαλήθευση της σχέσης. Η δεύτερη προτεινόμενη απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος στηρίζεται σε αυτό ακριβώς το όπλο της Φυσικής.

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί αν δοθεί η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του. Επομένως το εμβαδόν S του τριγώνου θα είναι συνάρτηση της υποτείνουσας α και της γωνίας θ. Με άλλα λόγια:

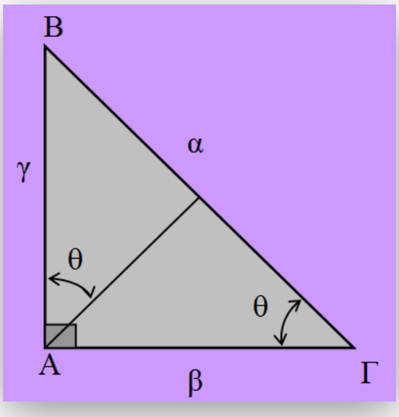
$$S = f(\alpha, \theta) \qquad (1)$$

Αλλά η υποτείνουσα έχει διαστάσεις μήκους ενώ η γωνία θ είναι αδιάστατη. Το εμβαδό βέβαια έχει διαστάσεις (μήκος)^2. Άρα, για να είναι η (1) διαστασιακά σωστή θα πρέπει η συνάρτηση να έχει διαστάσεις (μήκος)^2. Συνεπώς η συνάρτηση πρέπει να παίρνει την μορφή:

$$S = f(\alpha, \theta) = \alpha^2 g(\theta) \qquad (2)$$

όπου g αδιάστατη συνάρτηση της γωνίας θ η οποία λόγω συμμετρίας θα είναι ίδια για όλα τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα.

Φέρνουμε την κάθετη στην υποτείνουσα από την κορυφή Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει χωριστεί τώρα σε δύο όμοια τρίγωνα (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Εφαρμόζοντας τους ίδιους συλλογισμούς που οδήγησαν στην (2) σε κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα θα έχουμε:

$$S = f(\beta, \theta) = \beta^2 g(\theta) \qquad (3\alpha)$$

$$S = f(\gamma, \theta) = \gamma^2 g(\theta) \qquad (3\beta)$$

Αλλά $S=S_1+S_2$ οπότε συνδυάζοντας τις (2) και (3) παίρνουμε:

$$\alpha^2 g(\theta) = \beta^2 g(\theta) + \gamma^2 g(\theta) \qquad (4)$$

Προφανώς πρέπει να είναι $g(\theta)\neq 0$ οπότε από την (4) έχουμε τελικά:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο εργαστήριο Φυσικής

Μπορούμε επομένως να "αποδείξουμε" το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας αρχές της Φυσικής. Μπορούμε άραγε να το αποδείξουμε και πειραματικά όπως συμβαίνει με τους Φυσικούς νόμους; Η απάντηση είναι θετική. Η πειραματική απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους.

Ένας πανέμορφος τρόπος που είναι ευρέως γνωστός στο διαδίκτυο είναι μία κατασκευή με νερό (http://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o). Ένας άλλος τρόπος, που δεν απαιτεί ιδιαίτερες κατασκευές, προτείνεται στο φύλλο εργασίας που δίνεται στο Παράρτημα, στο τέλος του άρθρου. Πρόκειται για μία ανακαλυπτικού τύπου δραστηριότητα για μαθητές Γυμνασίου. Σε αυτήν οι μαθητές καλούνται να μετρήσουν, να επεξεργαστούν δεδομένα και να καταλήξουν επαγωγικά σε έναν "φυσικό νόμο". Η διαδικασία αυτή έχει επιστημολογική αξία. Πιθανόν, αν και υπάρχουν διαφωνίες επί του θέματος, με παρόμοιο τρόπο να ανακάλυψαν και οι Βαβυλώνιοι το Πυθαγόρειο θεώρημα, ίσως 1000 χρόνια πριν τον Πυθαγόρα, μετρώντας τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και διαπιστώνοντας ότι σε όλα τα ορθογώνια ισχύει η περίφημη σχέση (Αραμπατζής κ.α., 1999, σ. 21-22).

Εικόνα 1. Πειραματική "απόδειξη" του θεωρήματος με τη χρήση δυναμόμετρων (Αντωνίου κ.α., 2006, σ. 51).

Πίσω στο εργαστήριο, δεν έχουμε παρά να δοκιμάσουμε με τους μαθητές μας το απλό πείραμα που φαίνεται στην Εικόνα 1 (Αντωνίου κ.α., 2006). Μία κασετίνα αναρτάται από δύο δυναμόμετρα που σχηματίζουν ορθή γωνία μεταξύ τους και ισορροπεί. Καταγράφονται οι ενδείξεις τους: 4N και 3N αντίστοιχα. Η ίδια κασετίνα ισορροπεί στη συνέχεια με τον ίδιο ακριβώς τρόπο από ένα μόνο δυναμόμετρο που δείχνει ένδειξη 5N. Το πείραμα πραγματοποιείται για να αποδείξουμε τον περίφημο νόμο του παραλληλογράμμου, σύμφωνα με τον οποίο η συνισταμένη δύο διανυσμάτων δίνεται κατά μέτρο και κατεύθυνση από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα. Το πείραμα, όπως μπορούν να διαπιστώσουν οι μαθητές ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτή που παρουσιάζεται στο φύλλο εργασίας, μας αποκαλύπτει ότι σε αυτή την περίπτωση ισχύει η σχέση $F_{ολ}^2 = F_1^2 + F_2^2$ δηλαδή για άλλη μία φορά, το Πυθαγόρειο θεώρημα.

"Κλείνοντας το μάτι" στη σχετικότητα

Όσα παρουσιάστηκαν μέχρι στιγμής μπορούν να εφαρμοστούν στις τάξεις Φυσικής του Γυμνασίου. Για όσους ενδιαφέρονται να ρίξουν λίγο φως στη σχέση που κρύβεται ανάμεσα στη σχέση $E=m\cdot c^2$ και το Πυθαγόρειο θεώρημα θα χρειαστεί να ανασύρουν από τη μνήμη τους γνώσεις από τα φοιτητικά τους χρόνια. Ενδεχομένως, στο σημείο αυτό ο αναγνώστης να ήθελε να ανατρέξει στα εγχειρίδια του Rindler (2001) και του Pauli (1981) για να θυμηθεί τις βασικές αρχές και το μαθηματικό οπλοστάσιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Έτσι, η περίφημη σχέση $E=m\cdot c^2$ προκύπτει από τη σχέση που συνδέει την ενέργεια E με την ορμή p και τη μάζα ηρεμίας m0 ενός σώματος:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός. Από την παραπάνω σχέση της ενέργειας παρατηρούμε ότι αν αλλάξουμε σύστημα αναφοράς, λόγω της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός καθώς και της μάζας ηρεμίας, θα ισχύει η σχέση:

$$E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2$$

όπου E' και p' η ενέργεια και η ορμή στο νέο σύστημα αναφοράς.

Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, το τετραδιάνυσμα ορμής – ενέργειας σχετίζεται με το τετραδιάνυσμα θέσης-χρόνου. Έτσι μία παρόμοια σχέση με την τελευταία ισχύει και ανάμεσα στο χρόνο και το χώρο:

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

Οι παραπάνω σχέσεις ορμής-ενέργειας ή χώρου-χρόνου εκφράζουν, όμως, ουσιαστικά τη γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος σε έναν ψευδοευκλείδιο χώρο. Έτσι αν σε έναν τέτοιο χώρο έχουμε μία ράβδο που η μία άκρη της βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η άλλη έχει συντεταγμένες x, y το μήκος της ράβδου σε αυτόν τον χώρο δίνεται από τη σχέση $\alpha^2=y^2-x^2$. Το μήκος αυτό είναι σταθερό και ανεξάρτητο από το αν περιστρέψουμε ή όχι το σύστημα αναφοράς.

Μια διαφορά είναι ότι ενώ το Πυθαγόρειο θεώρημα στον ευκλείδιο χώρο εκφράζεται τριγωνομετρικά από τη σχέση:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

στην ψευδοευκλείδια γεωμετρία που χαρακτηρίζει την ειδική θεωρία σχετικότητας εκφράζεται από τη σχέση

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

όπου cosh και sinh οι συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο αντίστοιχα.

Συμπερασματικά

Η σχέση μεταξύ της Φυσικής και των μαθηματικών μοιάζει να είναι πολύ πιο στενή από αυτή που συνήθως μαθαίνουμε στο σχολείο. Στην εργασία αυτή επιχειρήθηκε να αναδειχθεί η σχέση αυτή μέσα από τη διαπραγμάτευση ενός μαθηματικού θεωρήματος με όρους Φυσικής.

Η άποψη του συγγραφέα είναι ότι τα μαθηματικά δεν είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα έξω από τη φύση που μας περιβάλλει, ούτε αποτελούν απλά τη γλώσσα της Φυσικής. Τα μαθηματικά ίσως να είναι ένα διαφορετικό μονοπάτι, καθαρά νοητικό, διερεύνησης της φύσης. Με άλλα λόγια τα μαθηματικά αποτελούν τον πλατωνικό τρόπο διερεύνησης της φύσης.

Γι αυτό και πιστεύουμε ότι είναι προς τη λανθασμένη κατεύθυνση η άποψη ότι όσο λιγότερα μαθηματικά χρησιμοποιούμε στη διδασκαλία της Φυσικής τόσο πιο εύκολη και πιο κατανοητή γίνεται από τους μαθητές. Θεωρούμε ότι η χρήση των μαθηματικών στη διδασκαλία της Φυσικής θα πρέπει να συνάδει με το επίπεδο γνώσης των μαθητών στα μαθηματικά. Αυτό μπορεί να γίνει στη πράξη, αν το αναλυτικό πρόγραμμα της Φυσικής και των μαθηματικών εκπονείται από κοινού.

Παραπομπές

1. Μπορείτε να δείτε 100 περίπου αυτές στη διεύθυνση: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

Βιβλιογραφικές αναφορές

Pauli, W. (1981). Theory of Relativity, Dover Publications, New York.

Rindler W. (2001). Εισαγωγή στην Ειδική Σχετικότητα, (Μετάφρ. Θ. Γραμμένος), Leader Books.

Αντωνίου, Ν., Δημητριάδης Π., Καμπούρης Κ., Παπαμιχάλης Κ., Παπατσίμπα, Λ. (2006). Φυσική της Β' Γυμνασίου. Διαθέσιμο στη διεύθυνση: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-B200/455/2985,11970/

Αραμπατζής, Θ., Γαβρόγλου, Κ., Διαλέτης, Δ., Χριστιανίδης, Γ., Κανδεράκης, Ν., Βερνίκος Σ. (1999). Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας. ΟΕΔΒ. Διαθέσιμο στη διεύθυνση: http://ebooks.edu.gr/courses/DSGL-C114/document/4deb5af4rqg4/4deb5af4tdig/4e2c28cayuy0.pdf

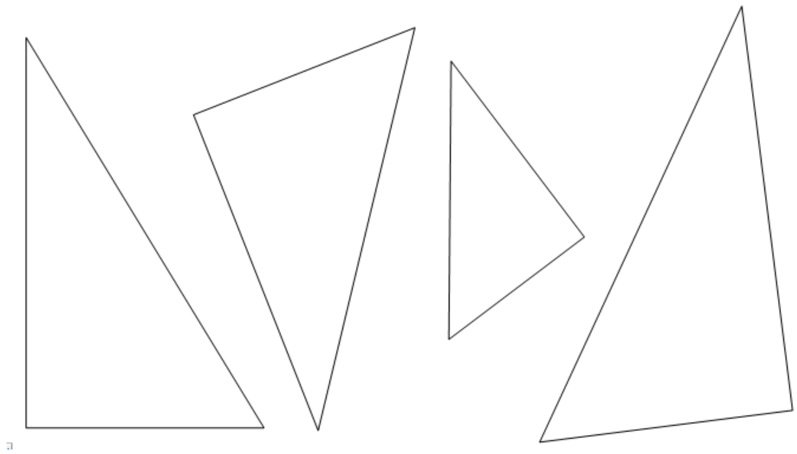
Παράρτημα

Φύλλο εργασίας

Μετρήσεις μήκους - Ανακάλυψη ενός φυσικού νόμου.

Βήμα 1ο

Παρακάτω είναι ζωγραφισμένα 4 ορθογώνια τρίγωνα. Μετρήστε με το χάρακά σας τις κάθετες πλευρές και την υποτείνουσα του κάθε τριγώνου και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα. Τις τιμές θα τις γράψετε με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου και με τις μονάδες τους. Έτσι θα συμπληρωθούν οι 3 πρώτες στήλες του παρακάτω πίνακα.



Υποτείνουσα α	1η κάθετος β	2η κάθετος γ	$α^2$	$β^2$	$γ^2$	$β^2+γ^2$	$α^2/(β^2+γ^2)$

Βήμα 2ο

Χρησιμοποιώντας ένα κομπιουτεράκι συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα. Προσοχή! Σε όλες τις στήλες θα γράψετε τους αριθμούς με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου κάνοντας τη σωστή προσέγγιση και με τις σωστές μονάδες.

Βήμα 3ο

Παρατηρώντας τις τιμές της τελευταίας στήλης σε ποιο γενικό συμπέρασμα μπορείτε να καταλήξετε; Γράψτε με δικά σας λόγια το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξατε

Πρόβλημα για το σπίτι – εφαρμογή της νέας γνώσης

Το μήκος μίας σκάλας είναι 1,5m. Στηρίζουμε το πάνω άκρο της σκάλας στο τοίχο και το κάτω άκρο στο πάτωμα σε απόσταση 0,5m από τον τοίχο. Σε πόσο ύψος από το έδαφος ακουμπάει η σκάλα στον τοίχο;

Ο Παναγιώτης Μουρούζης έχει σπουδάσει Φυσική στο Παν. Αθηνών. Απέκτησε το μεταπτυχιακό του τίτλο στη Ραδιοηλεκτρολογία από το τμήμα Φυσικής του Παν. Αθηνών. Είναι από τους πρώτους που συνετέλεσαν στην καθιέρωση του θεσμού των Ε.Κ.Φ.Ε στη χώρα μας. Συγγραφέας εργαστηριακών οδηγών, πλήθους επιστημονικών άρθρων και προδιαγραφών εργαστηρίων του Υπουργείου Παιδείας. Εισηγητής του θεσμού των Υπεύθυνων εργαστηρίων (ΥΣΕΦΕ). Υπεύθυνος του Ε.Κ.Φ.Ε Κέρκυρας διατηρεί τον ιστότοπο του Κέντρου http://dide.ker.sch.gr/ekfe