Θεωρητική ανάλυση

Αρχικά οι σταγόνες του λαδιού αφήνονται να πέσουν μεταξύ των πλακών με το ηλεκτρικό πεδίο απενεργοποιημένο. Στην περίπτωση αυτή οι σταγόνες κινούνται προς τα κάτω (προς την κάτω πλάκα) με την επίδραση του βάρους τους και της αντίστασης του αέρα και γρήγορα αποκτούν οριακή ταχύτητα. Από την οριακή ταχύτητα πτώσης μπορεί να υπολογιστεί η ακτίνα της σταγόνας και μετά μέσω της πυκνότητας η μάζα και το βάρος της. Καθώς η σταγόνα πέφτει υπό την επίδραση του βάρους της προς την κάτω πλάκα, και πριν φτάσει σε αυτήν, ένα ηλεκτρικό πεδίο υψηλής έντασης (ανάμεσα στα 3000V έως και 8000V ανά cm) δημιουργείται ανάμεσα στις πλάκες με τη βοήθεια της μπαταρίας. Το ηλεκτρικό πεδίο ρυθμίζεται ανάλογα με το πρόσημο του φορτίου που έχει αποκτήσει η σταγόνα από τη συσκευή προώθησης ή και από τα ιόντα που έχουν «κάτσει» πάνω της, ώστε η σταγόνα να ανεβαίνει προς την πάνω πλάκα. Πριν χτυπήσει στην πάνω πλάκα διακόπτεται η παροχή ρεύματος, καταργείται το ηλεκτρικό πεδίο και η σταγόνα πέφτει ξανά με την επίδραση του βάρους της.

Ο Millikan μετρούσε το χρόνο που έκανε η σταγόνα να διανύσει την ίδια απόσταση που αντιστοιχούσε στο διάστημα ανάμεσα στις διαγραμμίσεις που φαίνονταν από το μικροσκόπιο με και χωρίς ηλεκτρικό πεδίο, χωρίς ιόν ή με ιόν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβανόταν και οι ταχύτητες μετρούνταν για ένα μη καθορισμένο αριθμό φορών. Το λάθος στην παρατήρηση δεν ξεπερνούσε το 3%.

Μαθηματική ανάλυση:

i) κίνηση σταγόνας απουσία ηλεκτρικού πεδίου

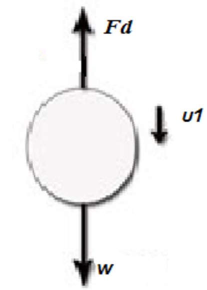
Ας φανταστούμε μια σφαιρική σταγόνα λαδιού ακτίνας $\boldsymbol{r}$ και την πυκνότητας $\boldsymbol{\rho}$ να κινείται με οριακή ταχύτητα, απουσία ενός ηλεκτρικού πεδίου, μέσα στον αέρα πυκνότητας $\boldsymbol{\rho_{air}}$ και ιξώδους $\boldsymbol{\eta}$. Η δύναμη της αντίστασης $\boldsymbol{F_d}$ για την κίνηση μιας σφαίρας σε ρευστό, μπορεί τότε να υπολογιστεί από τον νόμο του Stokes :

$$\boldsymbol{F_d = 6\pi r \eta \upsilon_1} \qquad (6.1)$$

όπου $\boldsymbol{\upsilon_1}$ είναι η οριακή ταχύτητα της πτώσης σταγόνας. Το βάρος $\boldsymbol{w}$ είναι ο όγκος $\boldsymbol{V}$ πολλαπλασιαζόμενος με την πυκνότητα $\boldsymbol{\rho}$ και την επιτάχυνση της βαρύτητας $\boldsymbol{g}$. Ωστόσο, μας ενδιαφέρει το «φαινόμενο» βάρος (το πραγματικό βάρος μείον την άνωση), που για ένα τέλεια σφαιρικό σταγονίδιο το μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$w = \frac{4\pi}{3} r^3(\rho - \rho_{air})g \qquad (6.2)$$

Στην οριακή ταχύτητα η σταγόνα δεν επιταχύνεται. Ως εκ τούτου, η συνολική δύναμη που ενεργεί σε αυτήν πρέπει να είναι μηδέν και οι δύο δυνάμεις F_d και w πρέπει να εξουδετερώνει η μία την άλλη. Από τις (6.1) και (6.2) προκύπτει:



$$6\pi r\eta \upsilon_1 = \frac{4\pi}{3} r^3(\rho - \rho_{air})g \qquad (6.3)$$

από την οποία: $r^2 = \frac{9\eta\upsilon_1}{2g(\rho-\rho_{air})}$ ή $r = \sqrt{\frac{9\eta\upsilon_1}{2g(\rho-\rho_{air})}}$ (6.4)

Με πειραματική μέτρηση επομένως της ταχύτητας πτώσης, μπορεί εύκολα να υπολο-γιστεί η ακτίνα της σταγόνας r και κατ' επέκταση το βάρος w.

ii) κίνηση σταγόνας παρουσία ηλεκτρικού πεδίου

Όταν ενεργοποιείται το ηλεκτρικό πεδίο, η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται επιπρόσθετα στη σταγόνα είναι:

$$Fe = qE \qquad (6.4)$$

όπου q είναι το φορτίο της (πράγμα που αποτελεί και ζητούμενο του πειράματος) και το E είναι το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών. Για παράλληλες πλάκες:

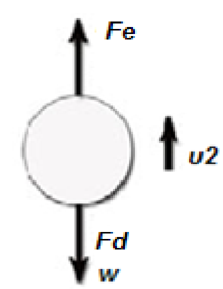
$$E=V/d \qquad (6.5)$$

όπου V είναι η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού και d είναι η απόσταση μεταξύ των πλακών. Ο υπολογισμός του φορτίου q είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί ως εξής: ρυθμίζουμε την τάση V μέχρις ότου η σταγόνα ακινητοποιηθεί. Τότε εξισώνοντας τις ανταγωνιζόμενες δυνάμεις Fe και w προκύπτει:

$$qE = \frac{4\pi}{3} r^3(\rho - \rho_{air})g \quad ή \quad q\frac{V}{d} = \frac{4\pi}{3} r^3(\rho - \rho_{air})g \quad ή$$

$$\boxed{q = \frac{4\pi d}{3V} r^3(\rho - \rho_{air})g}$$

Επειδή η σταγόνα λαδιού είναι δύσκολο να ακινητοποιηθεί και επιπλέον μάζα της να προσδιοριστεί χωρίς την εκ νέου χρήση του νόμου του Stokes,



μια πιο πρακτική προσέγγιση είναι να μεταβάλλουμε την τάση $\boldsymbol{V}$, έτσι ώστε η σταγόνα να ανέρχεται με μια νέα οριακή ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_2}$ (αυτή την τεχνική άλλωστε εφάρμοσαν και οι Millikan και Fletcher στο πείραμα). Στην περίπτωση αυτή:

$$\boldsymbol{F_e - (F_d + w) = 0} \quad ή \quad \boldsymbol{qE = 6\pi r\eta\upsilon_2 + \frac{4\pi}{3}r^3(\rho-\rho_{air})g} \qquad (6.6)$$

ή με τη βοήθεια των σχέσεων (6.5), (6.1) και (6.4):

$$\boldsymbol{q\frac{V}{d} = 6\pi r\eta\upsilon 2 + 6\pi r\eta\upsilon 1} \quad \text{οπότε:}$$

$$\boxed{\boldsymbol{q = \frac{6\pi\eta(\upsilon_1+\upsilon_2)}{V/d}\sqrt{\frac{9\eta\upsilon_1}{2g(\rho-\rho_{air})}}}}$$